

Artikel till Spektri i januari 1997
assistent Ann-Sofi Røj-Lindberg
Pedagogiska fakulteten vid ÅA, Institutionen för lärarutbildning

Matematikundervisningen i blickpunkten

I denna artikel vill jag inleda med några aktuella resultat från det matematikdidaktiska forskningsfältet. Spaltutrymmet ger inte möjlighet till någon djupare granskning och diskussion men eftersom didaktiska förändringar i skolan borde grunda sig på forskning vill jag ändå lyfta fram några resultat som kan anses vara viktiga i första hand för grundskolans matematikundervisning ur ett internationellt perspektiv. Jag går sedan över till att ge en kort beskrivning av ett nationellt utvecklingsprojekt. PUMA - projektet vid Vasa Övningsskola är ett aktionsforskningsprojekt där lärarna i samarbete med Institutionen för lärarutbildning strävar till att utveckla matematikundervisningen och beakta redovisade resultat av pedagogisk och ämnesdidaktisk forskning.

Aktuella forskningsresultat

Under de senaste 30 åren har utvecklingen på det matematikdidaktiska forskningsfältet varit mycket expansiv. Det finns tusentals artiklar och böcker att studera. Det kan med andra ord vara rätt svårt att hitta fram till de viktigaste och pålitligaste forskningsresultaten. Den avgjort bästa metoden är att bekanta sig med arbeten som i mera översiktlig form presenterar aktuell forskning och som lyfter fram de mest väsentliga resultaten. Jag kommer här att presentera några glimtar ur en mycket lättillgänglig sammanställning av det slaget, som gjorts av Mike Askew och Dylan Wiliam vid King's College i London. Askews och Wiliams sammanställning lyfter fram resultat av forskning i grupper med elever i åldern 5 till 16 år, som utförts under de senaste 15 åren. Man utgår i första hand från resultat av sådana studier som utförts i vanliga klassrumsmiljöer och som uppvisar signifikanta positiva effekter på matematikinläringen och på attityderna till matematiken. De redovisade resultaten speglar förhållanden som råder på den internationella arenan men är värda att granskas även ur nationell synvinkel.

Av resultaten från de sammanlagt 19 forskningsområden som Askew och William redogör för, har jag valt ut några som kan vara av intresse för alla matematiklärare oberoende av undervisningsstadium. De kan också vara intressanta för lärare i andra ämnen. Resultaten pekar förutom på arbetssätt och undervisningsmetoder, som kan leda till märkbara förbättringar av inläringen, även på faktorer som hänger samman med lärarens kunskaps- och elevsyn samt med skolans och samhällets syn på kunskap i allmänhet och på matematiken i synnerhet. Om skolan till exempel övergår från den traditionella lektionslängden på 45 min till längre arbetspass ger man vettigare tidsramar för arbetsformer där eleverna är aktiva och som ger större garantier för effektiv inläring.

- Att eleverna är intensivt engagerade i gruppdiskussioner kring mera avgränsade uppgifter är en bättre garanti för effektiv inläring än om man i klassen går igenom mera stoff under samma tid. Uppgifterna borde alltså väljas så att centrala begrepp blir behandlade vid gruppdiskussioner.

- Matematikinläringen förbättras om man i undervisningen lyfter fram och diskuterar vanliga missuppfattningar.

Det är bättre att först låta eleverna själva upptäcka sina missuppfattningar och sedan diskutera dem tillsammans än att läraren börjar med att berätta för eleverna om vanliga missuppfattningar.

- Inläringen kan bli effektivare om eleverna får fler tillfällen att tillämpa, sammanställa, diskutera och förklara sin kunskap. Genom att undvika frågor som går ut på att eleverna skall upprepa fakta och samtidigt komma ihåg att ge tillräckligt (åtminstone tre sekunder!) med betänketid, kan man uppnå en signifikant inlärningsförbättring. I stället för att fråga "Vad kallas den här formen?" frågar man till exempel "Hur skulle du beskriva den här formen för en kompis som du talar med i telefon?".

En projektinriktad matematikundervisning innebär att eleverna även ges fler möjligheter att utveckla sina färdigheter att tillämpa och förklara den matematik de kan. Den typen av undervisning borde ges större vikt än vad som nu vanligen är fallet.

- Begreppsbildningen i matematik baseras i allmänhet på exempel men eleverna drar ofta andra slutsatser om begreppets egenskaper än vad läraren tänkt sig. Det är sannolikt att eleverna även kommer att koppla samman irrelevanta egenskaper med begreppet i fråga, exempelvis att det till en triangels egenskaper hör att det är en figur med tre sidor, men att den sida som är längst ner i figuren dessutom alltid skall vara horisontell.

För att undvika den här effekten borde elevens begreppsbildning baseras på en mycket väl vald blandning av exempel och icke-exempel. Exemplet borde ligga så nära icke-exemplet som möjligt och icke-exemplet borde väljas så att de ligger så nära exemplet som möjligt. Om man behandlar begreppet "fågel" är det bättre att välja t.ex. en fladdermus som icke-exempel än en elefant och en pingvin eller struts som exempel i stället för en svan.

- Det har visat sig att kvaliteten på matematikinläringen är kontextrelaterad. Om till exempel de problem man löser i klassrummet är tillrättalagda och utan kopplingar till verkligheten kan det leda till svårigheter för eleverna att tillämpa det inlärd i verklighetsbaserade situationer. Man borde i matematikundervisningen lägga stor vikt vid uppgifter som inte är så väl tillrättalagda, som kan lösas på flera olika sätt och som måste lösas i ett socialt sammanhang, som kan inkludera grupsamverkan inom klassens ram eller arbete ute i samhället.

Grupsamverkan har visat sig ha positiva effekter på inläringen under förutsättning att gruppen har ett tydligt gemensamt mål.

- Det finns inget självklart positivt samband mellan beröm och prestation. Många studier har till och med visat att lärare som ansågs effektiva inte berömde sina elever lika ofta som sina mindre effektiva kolleger. Kvaliteten och inriktningen på berömmet spelar en större roll än frekvensen. Störst effekt får beröm som är betingat, specifikt och trovärdigt. I stället för att vara av generell karaktär borde lärarens berömmande och uppmuntrande ord vara kopplade till något speciellt eleven gjort. Berömmet borde dessutom vara ärligt menat och signalera en medvetenhet om att eleven verkligen har ansträngt sig och därmed visat prov på den eftersträvade förmågan. Berömmet borde fokusera elevens uppmärksamhet på beteenden som är relevanta för uppgiften och utveckla elevens vilja att anstränga sig för att utveckla dessa beteenden, inte för att göra

någon (oftast läraren) till lags eller vara bäst i klassen. Osystematiskt och slentrianmässigt beröm genomskådas snabbt av eleverna och kan i värsta fall medföra negativa konsekvenser för inläringen.

Rätt riktat och väl formulerat beröm har däremot i allmänhet en motivationshöjande effekt.

PUMA-projektet

Det finns många orsaker till att man sätter i gång med förändringsarbete vid en skola. Pådrivande krafter är å ena sidan lärarnas behov av och vilja till förändring och de vetenskapliga grunder som didaktisk forskning ger. Å andra sidan spelar de förväntningar som ställs på skolan utifrån en stor roll. För att det didaktiska förändringsarbetet skall medföra bestående effekter måste förändringarna upplevas som förbättringar och vara tecken på att den eftersträvade utvecklingen verkligen ägt rum. Resultaten bör vara iakttagbara för både aktörer och uppdragsgivare till exempel i form av förbättrade attityder och höjd prestationsnivå.

Orsaken till att några matematiklärare vid Vasa Övningskola hösten 1993 började genomföra förändringar i matematikundervisningen i åk 7 kan delvis sökas i ett missnöje med tidigare praxis och arbetet med den skolvisa läroplanen. Förändringarna i Grunderna för grundskolans läroplan, GgL-94, samt det faktum att elever som undervisats i enlighet med ELMA-projektets¹ *Tänk och räkna* - filosofi skulle börja i högstadiet, gav sedan den inspiration som behövdes för att man skulle börja ta nya tag i matematikundervisningen utifrån några gemensamt formulerade, centrala mål.

Projektet PUMA, Processer och Utvärdering i MAtematikundervisningen, pekar på att man ställer inlärningsprocesserna och utvärderingen av inlärningsresultaten i centrum. Detta är två områden som även är centrala för GgL-94 i och med dess kognitivt inriktade inlärningsyn och att den framhäver behovet av en förnyad bedömningspraxis (s. 10, 25). Elevens aktiva roll för att främja den egna inläringen betonas på många ställen i GgL-94, likaså framhävs för matematikens del att undervisningen skall inkludera kommunikation, projektbaserat ämnesintegrerat arbete, vardagsanknytning, problemlösning och betoning av matematiken som ett verktyg för den intellektuella utvecklingen (s. 76-79). Detta ingår som viktiga utgångspunkter för undervisningen inom PUMA - projektet.

Utvärderingen är ett centralt styrmedel för undervisningen. Genom att förändra utvärderingen får man samtidigt en garanti för att de arbetssätt och den inlärningsyn som utvärderingen favoriserar, tillämpas och blir bestående i undervisningen. PUMA - projektets fokusering på inlärningsprocesser syns i utvärderingen bland annat på så sätt att proven nu även mäter elevernas förmåga att förklara sina matematikkunskaper. Utvärderingen och bedömningen har på det hela taget blivit mera allsidig och dynamisk. Hur elevens medvetna inlärningsansvar samt inre vilja att lära och anstränga sig skall kunna stärkas, är viktiga teman inom PUMA - projektet. Detta har kopplats samman med utvärderingen såtillvida att man förutom frågor som berör inläring och förståelse även diskuterar bedömningsfrågor med eleverna i högre grad än förut.

Undervisningen har blivit mera induktiv och diskuterande och man strävar till att ge eleverna ett mångsidigare förhållningssätt till matematiken. De större projektarbeten man genomför ett par gånger per termin har blivit uppskattade av eleverna därför att de ger utrymme för både individuellt arbete och gruppsamverkan och ger ökad frihet för eleverna både vad gäller frågeställningar, problemlösningsmetoder och presentation av arbetet. Projektarbetena är ett utvärderingsinstrument som betonar resultatet, arbetsprocessen och presentationen av arbetet.

Sedan hösten 1994 har projektlärarna samarbetat mera målmedvetet med Institutionen för lärarutbildning, vilket inneburit att institutionen haft ett delansvar för att föra projektet framåt och även kopplat samman PUMA - projektet med institutionens forskning kring hur högstadiel elever uppfattar undervisning och undervisningsmetoder. Som projekt upplever PUMA sitt sista läsår och det återstår att se hur mycket av projektets idéer som kommer att leva vidare och synas i undervisningen även i framtiden..

Forskning kring elevuppfattningar

Med stöd av utbildningsstyrelsen anställdes jag år 1994 som forskningsassistent vid lärarutbildningsinstitutionen med uppgift att delta i projektutvecklingen och samtidigt kartlägga elevernas uppfattningar om projektets undervisningsmetoder och projektets effekter på elevernas inläring och attityder till matematik. Uppdraget innehöll således ingen utvärdering av undervisningsmetoderna inom PUMA - projektet. Detta kan ses som självklart med tanke på att PUMA - projektet har vuxit och utvecklats i enlighet med principerna för aktionsforskning och därmed har undervisningsmetoderna blivit utsatta för återkommande översyn och revision. Undervisningen har alltså genomgått en fortlöpande gransknings- och utvecklingsprocess. Vidare har resultat från datainsamlingen, dvs. kunskap om hur eleverna uppfattar undervisningen, beaktats vid revisionen av metoderna och då lärarna förverkligat undervisningen.

Datainsamlingen har fokuserats på elevernas sätt att tänka och resonera om undervisningen och om matematiken som skolämne. Kvalitativa intervjuer med elever har utgjort den huvudsakliga datainsamlingsformen. Hösten 1994 valdes totalt 28 elever ut från de klasser i åk 7 och 8 som då berördes av PUMA - projektet. För att garantera en så stor spridning som möjligt valdes de ut på basen av ett matematiktest och ett självuppfattningstest. Sammanlagt kommer det empiriska materialet att omfatta cirka 125 intervjuer. Fyra intervjuer har gjorts med de elever som började i åk 8 hösten 1994 och fem intervjuer kommer totalt att göras med de elever som började i åk 7 samma höst. I maj 1997 genomförs den nionde och avslutande intervjun med de 14 intervjuel elever som då går ut grundskolan.

Eleven: läraren ger recepten

De resultat från lärarutbildningsinstitutionens forskning kring högstadielvers syn på undervisning i allmänhet, som presenterades i SPEKTRI 5/96, visar på tydliga kvalitativa skillnader i elevernas tänkande om undervisning. Bland annat framkommer att en allmän uppfattning hos eleverna i högstadiet är att de ser sig själva som passiva konsumenter av undervisning med läraren som

ansvarig för att de lär sig något. Veldig många högstadiel elever motsvarar alltså inte det som i GgL-94 sägs om att utgångspunkten för undervisningen är elevernas nyfikenhet, vetgirighet och aktivitetsvilja (s. 12). Sällan ser eleverna sig som viktiga agenter för sin egen inläring. Hela 63% av eleverna i undersökningen anser att den centrala rollen i klassrummet spelas av läraren och de delar synen att inläringen sker tack vare lärarens förmåga att lära och tillrättalägga undervisningen, inte tack vare att eleven själv är aktiv.

Studier av matematikundervisning har påvisat likartade resultat. Övertygelsen om att matematik är något man lyckas med, om man löser uppgifterna precis så som läraren sagt, är fast rotad. Eleverna förväntar sig i allmänhet inte att de skulle kunna lära sig matematik utan lärarens ledning och de ser sig själva som brukare av något som andra människor har skapat. Det finns resultat som tyder på att elever ofta tolkar lärarens instruktioner som ett recept för att klara uppgiften snarare än ett sätt att lära sig ämnet. (Schoenfeld, 1988).

Rolluppfattningen avgörande för dialogen

Dialogen mellan elev och lärare är den viktigaste grundförutsättningen för undervisning och inläring. Elevens uppfattning av sin elevroll och lärarens uppfattning av sin lärarroll är avgörande för utformningen och resultatet av dialogen. Om läraren gör medvetna förändringar i lärarrollen och i undervisningsmetoderna kan man följdriktigt anta att förändringen även påverkar eleven och att elevens syn på undervisningen förändras. Men forskning har även påvisat att elevens sätt att tänka om undervisning inverkar på lärarens sätt att undervisa och på de didaktiska beslut läraren fattar i olika skeden av undervisningsprocessen. Om majoriteten av eleverna uppfattar ett inläring är något som så att säga kommer "på köpet" då man vistas i klassrummet är det sannolikt att sådana metodiska förändringar, som grundar sig på en syn på eleven som aktiv part i undervisningsprocessen, möts med misstro från elevernas sida. Genom att göra eleverna medvetna om orsakerna till förändringen och ge tillräckligt med tid till övning av de nya lärar- och elevrollerna kan man bygga upp den nya klassrumskulturen på ett sätt som är tryggt för både lärare och elever och som på längre sikt ger de eftersträfvade effekterna.

Reagerar eleven på förändringar?

Forskarsamfundet har hittills riktat ganska lite uppmärksamhet mot hur eleverna uppfattar förändringar i undervisningen. Speciellt gäller detta matematikundervisningen på grundskole- och gymnasienivå.

De didaktiska lösningar man försökt förverkliga inom PUMA har som en central målsättning att fostra eleven till ökat ansvarstagande för egen inläring. Lärarna har försökt förändra sitt sätt arbeta och strävat till att lämna sin traditionella rätt så dominanta lärarroll för att i stället ge mera utrymme åt elevernas röster och införa arbetssätt som förutsätter att eleverna är aktiva. Men hur har eleverna reagerat på de förändringar man gjort? Återspeglar sig den didaktiska förändringsprocessen på elevernas sätt att se på undervisningen?

Eftersom datainsamlingen fortfarande pågår och bearbetningen av intervjumaterialet dessutom är en lång och tidskrävande process, kan jag inte ännu i detta skede redovisa för några slutgiltiga resultat och svar på ovanstående frågeställningar. Men vill jag ändå aktualisera och belysa med elevcitater, några preliminära slutsatser på basen av en begränsad del av de data som samlades in

under läsåret 1994-95. Den valda forskningsmetoden ger möjlighet att studera elevuppfattningar både i början och slutet av projektet och kan även ge en bild av förändringar i elevuppfattningar under projektets gång. De slutsatser som här redovisas återspeglar allmänna uppfattningar hos elever för vilka projektets metoder ännu är relativt nya.

Ur många av elevsvaren tonar bilden av matematiklektionen som en väl regisserad och förutsägbar föreställning fram. Föreställningen leds av läraren och eleverna uppfattar detta som självklart. De kan i allmänhet inte tänka sig någon annan uppläggning av matematiklektionerna vilket syns till exempel då de skall tänka sig in i hur de själva skulle arbeta som matematiklärare. Den vanliga matematiklektionen följer ett visst mönster: först går läraren igenom hemläxan och kontrollerar att den är gjord, sedan introducerar läraren nytt stoff, det nya övas med hjälp av uppgifter ur boken och till slut ger läraren hemläxa.

“Först ser ... läraren att man har gjort läxan. Och sen kanske tar vi svåraste uppgiften på tavlan och sen får vi räkna själva. Kanske någon gång teori”

“Alla våra matematiklektioner ser nästan likadana ut. Först har vi teori då vi skriver ner de olika saker vi håller på med...och sedan när vi har skrivit ner så frågar läraren olika uppgifter och sedan får vi räkna fritt i matematikboken”

Inte så överraskande anser de flesta eleverna att matematik hör till de viktigaste skolämnena. Matematik är något man måste lära sig därför att man antagligen även kommer att behöva matematikkunskaperna i ett senare skede av livet. Att man för tillfället inte kan se någon mening med matematiken är därför något som kan accepteras är en syn som kommer fram.

“Inte förstår jag vad man har för nytta av x gånger x gånger x , men jag fattar väl sen om några år. Men nog är det viktigt nog. Att veta sånt där addition och sånt”.

Nyttoaspekten är överlag väldigt framträdande både i resonemang som gäller nuet och framtiden. Då man går och handlar kan det vara bra att kunna räkna men man har också nytta av matematiken inom andra skolämnen, i fortsatta studier och då man skall söka ett jobb.

Eleverna är inte benägna att tro på att det är möjligt att inläringen skulle kunna ske under angenämare former som skulle avvika från det vanliga lektionsmönstret. Man framför trevande funderingar kring att det kunde vara bra med annorlunda undervisning både vad gäller valet av uppgifter och arbetssätt, men att det skulle leda till att fler lär sig och börjar tycka om ämnet, det tvivlar man på.

“..det blir nog roligare, fast inte kan man ju ha det så många gånger. Man lär sig ju inte mycket på det heller”, “...inte vet jag om de kan tycka om matteundervisningen fast hur man skulle göra. Men de måste ju ändå lära sig.”

Då eleverna beskriver sina önskemål gällande matematikundervisningen kommer synen på läraren som den som skall förklara, lära ut, hjälpa och upprätthålla arbetsron i klassen fram. Det kommer i första hand an på läraren om matematiken är ett “kul” ämne eller inte. Men om eleverna ges

större frihet att själva välja arbetssätt, till exempel att arbeta individuellt eller i grupp, så antar många, främst flickor, att det kunde få positiva effekter på intresset för matematiken. Att flickorna överlag har en positivare syn på arbete i grupp bekräftas i den enkät som genomfördes på våren efter en geometrisekvans med undervisning i heterogena smågrupper i åk 8. Enkätsvaren visar också att flickorna uppfattat sig som mera ansvarstagande än pojkarna.

Eftersom en ökad medvetenhet om matematiskt tänkande i allmänhet och det egna tänkandet i synnerhet är en strävan inom PUMA ville jag vid intervjuerna också få reda på hur eleverna uppfattar orsaken till att läraren väcker diskussion kring olika sätt att tänka. Svaren visar att diskussioner kring tänkande är ett vanligt inslag i undervisningen. Men svaren visar också att eleverna inte ännu kopplar det, att läraren ber dem redogöra för hur de tänkt vid lösningen av en uppgift, till någon större medvetenhet om tänkande och ansvar för ett eget lärande. De tenderar att istället uppfatta kunskap om hur elever tänker som tillhörande lärarens intresseområde. Lärarens intresse ser eleverna dels som ett behov av att kontrollera att eleven faktiskt gjort uppgiften och inte fuskat eller skrivit av facit och dels för att höra huruvida eleven lärt sig på det sättet som läraren tycker är rätt eller effektivt. Men synen att läraren väcker diskussion kring tänkande för att underlätta inläringen är också tydligt skönjbar vilket följande citat är exempel på:

“Det är säkert för att man skall få träna som att beskriva och berätta ...det är ju bra som så får andra veta hur man tänker...men så vill de ju (lärarna) veta hur man tänker.”

Sammanfattningsvis kan konstateras att de uppfattningar om matematikundervisningen som kommit fram vid den inledande datainsamlingen inte skiljer sig mycket från de uppfattningar om inläring och undervisning som redovisats i tidigare studier. Det fortsatta forskningsarbetet kommer förhoppningsvis att kunna ge svar på frågan om man med ett forskningsbaserat utvecklingsarbete av PUMA:s typ kan åstadkomma bestående positiva förändringar i elevernas sätt att tänka om matematikundervisning och inläring.

¹ ELMA - projektet, ELevanpassad MAtematikundervisning pågick vid Vasa Övningsskolas lågstadium 1987- 1994.

Referenser

Askew, M. & Wiliam, D. (1995): *Recent Research in Mathematics Education 5-16*. London: Office for Standards in Education.

Grunderna för grundskolans läroplan 1994. Helsingfors: Utbildningsstyrelsen.

Schoenfeld, A. (1988): *When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disaster of “Well-Taught” Mathematics Courses*. *Educational Psychologist*, 23(2), 145-166.