

Samverkan i matematikundervisningen

Assistent Ann-Sofi Røj-Lindberg

Ingår i: Røj-Lindberg, A-S & Wikman, T. (red.) (2001) *Att lära i samarbete. Samarbetsinläring i teori och praktik*. Vasa: Fortbildningscentralen vid Österbottens Högskola

Inledning

Under 90-talet har den offentliga diskussionen i vårt land, liksom i många andra länder, uttryckt åsikten att den grundläggande matematikundervisningen inte är tillräckligt effektiv. Företrädare för näringsliv, skolfolk och gemene man är bekymrade över att många elever inte kan tillräckligt med matematik då de slutar skolan. Man frågar sig också varför så många elever med goda prestationer i matematik ändå tappar intresset för fortsatta studier. Ett färskt fenomen i den här riktningen är en ökande andel elever som väljer bort långa matematiken i studentexamen. Man har också pekat på det förhållandevis låga antalet lektioner i matematik, skillnaden mellan den skrivna och den förverkligade läroplanen, nivån på lärarnas matematikkunskaper och deras metodiska kompetens samt läroböckernas kvalitet (Björkqvist, 1994, 1995; Kupari & Saranen, 1999; Pehkonen, 1999; Udd-Ståhl, 1999).

Ett gemensamt drag hos de frågor som ställs är deras stora komplexitet. En rättvis behandling av området skulle därför kräva mycket mera utrymme än de sidor jag här har till mitt förfogande. Men eftersom målet för publikationen är att visa vägar för den metodiska utvecklingen, så kan jag rikta in mig enbart på denna och lämna de andra stora frågorna därhän. Jag kommer att begränsa mig till ett försök att kontrastera den traditionella matematikundervisningen mot en som betonar samverkan. För att få skillnaderna att framträda görs diskussionen med avsikt lite tillspetsad. Faktum är att den verkliga situationen i ett matematikklassrum sällan är metodiskt renodlad. I den här texten utgår jag ifrån den matematikundervisning jag själv är mest förtrogen med, dvs. högstadiets, men diskussionen kunde lika väl gälla matematikundervisningen i gymnasiet.

Utgående från min kartläggning av högstadiernas matematikundervisning från hösten 1997 och annan liknande forskning, kan jag påstå att traditionell undervisning med individuell träning ur läroboken är det oftast förekommande arbetssättet i de finlandssvenska högstadierna. Dessutom finns det anledning att tro att matematiklärarna sällan tillämpar elevaktiva arbetssätt och elevsamverkan i undervisningen på ett medvetet sätt (Black & Atkin, 1996; Gruginetti & Jaquet, 1996; Røj-Lindberg, 1999a, 1999b)

Synen på inläring i läroplanen

Läroplanen för grundskolan från år 1994 överensstämmer med en socialt kognitiv syn på inläring. Inom den ses matematikinläring både som en intellektuell och som en social aktivitet. Den socialt kognitiva synen framträder och betonas på flera olika sätt i läroplanstexten, till exempel sägs att "inläringssituationer skall byggas upp så, att man diskuterar, experimenterar och löser problem" (Ggl, 1994, s. 78). I kriterierna för slutbedömningen påpekas vidare att läraren vid metodval borde beakta att eleverna skall "lösa problem tillsammans med andra elever" (1999, s. 53).

I läroplanen kan man se influenser från den ryske psykologen Vygotsky. Hans snart 100-åriga kungstanke var att kunskapen är kulturellt betingad, det vill säga att individens kulturella omgivning påverkar både individens kunskap och individens sätt att tänka om kunskap. Sedd ur ett skolperspektiv innebär Vygotskys kungstanke att elevens kognitiva utveckling är resultatet av en process där eleven lär sig genom att lösa problem i samverkan med någon eller några andra i sin omgivning, ofta lärare eller föräldrar, men också klasskamrater. Ju äldre eleverna blir, desto viktigare är klasskamraterna. Till en början behöver eleven mycket stöd och hjälp av andra. Gradvis överförs ansvaret för problemlösningen till eleven själv. Det av Vygotsky myntade uttrycket "What a child can do with assistance today, the child will be able to do by herself tomorrow" är numera accepterat av många andra utbildningsforskare. Vygotsky avsåg problemlösning i vid mening, men tanken gäller förstås likafullt för matematisk problemlösning (Bråten, 1998).

Att matematikinläring även ses som en social aktivitet, minskar inte den individuella övningens betydelse. Inläring av matematiska basfakta kräver i allmänhet en långsiktig och individuell träning vars plats i undervisningen mycket väl kan försvaras. Målet borde ändå vara en integrering av det individuella arbetet med matematiska diskussioner och andra elevaktiva undervisningsformer.

Att förändra och ta in något nytt i skolans värld betyder ju inte att man med detta fyller ett tomrum. För att ge rum för det nya måste något eller någon omformas eller ändra sig, eller något kanske måste tas bort helt. En sådan process väcker alltid krafter som arbetar i motsatt riktning. För skolmatematikens del kan förändringsmotståndet delvis förklaras med den starkt rotade traditionella synen på vad matematik är och hur matematikundervisning skall bedrivas. Bestående förändringsåtgärder kräver alltså att denna syn luckras upp och att en annan syn blir accepterad som mera fruktbar av matematiklärarna, dvs. av dem som skall omvandla synen i handling. Även elevernas motstånd mot förändring måste brytas. Ju äldre elever det gäller, desto starkare vill de hålla fast vid bekanta och invanda arbets sätt.

Genom att jämföra mål och arbets sätt hos den traditionella och den socialt kognitiva synen, kan vi skapa oss en bild av vilka dimensioner förändringen omfattar. I stora drag kan man säga att förändringen ger en matematikundervisning som är mera inriktad på arbetsprocessen och på interaktion, än på individuell träning och korrekt räknande: det blir lika viktigt att förklara och resonera tillsammans som att nå fram till en acceptabel lösning.

	Traditionell syn	Socialt kognitiv syn
Mål	Individuellt behärskande av basfärdigheter (matematiska fakta och procedurer). Snabbhet och korrekthet.	Kommunikationsfärdigheter. Problemlösning i samverkan.
Arbets- sätt	Läraren framställer. Individuellt arbete. ----- Läraren och läroboken ses som de huvudsakliga auktoriteterna.	Effektiva strategier och goda förklaringar. Eleven presenterar. Arbete i små grupper. ----- Eleven ser sig själv och sina medelever som källor till intellektuell utveckling.

Figur 1. Mål och arbetssätt enligt den traditionella respektive den socialt kognitiva synen på matematikinläring (bearbetning utgående från Gruginetti & Jaquet, 1996).

Traditionell matematikundervisning

Enligt forskarna Black & Atkin (1996) baserar sig den så kallade traditionella matematikundervisningen på ett antal väl etablerade grundantaganden om inläring:

- Det är viktigare att räkna rätt än att veta och kunna förklara hur man räknar.
- Eleverna skall först ta emot och lära sig fakta och procedurer utantill, sedan skall förståelse byggas upp med hjälp av rutinuppgifter innan tillämpningar prövas.
- Man skall i första hand satsa på inläring av den abstrakta matematiken, tillämpningarna tar man senare, om man hinner, eller så skjuter man över dem till nästa skolform.
- Man kan öka elevens motivation genom yttre tryck, till exempel prov och andra slags kontroller, inte genom att byta undervisningsmodell.
- Om en elev misslyckas med inläringen så beror det på att eleven inte har ansträngt sig tillräckligt eller har bristande matematisk begåvning, snarare än att lärarens undervisningsstil och elevens inlärningsstil inte passar ihop.

Ovanstående antaganden är i allmänhet inte uttalade och medvetna för läraren. Klassrumsforskning och intervjuer med lärare har dock bekräftat att de formar en bas för hur lärare organiserar matematikundervisningen i stora delar av världen.

Generaliseringar ger sällan rättvisa åt den enskilde matematikläraren. Jag påstår ändå att en genomsnittlig matematiklektion i en vanlig finlandssvensk högstadielklass i mångt och mycket präglas av ovanstående tankar. Jag påstår också att lektionen ofta struktureras enligt det mönster som forskarna Bodin och Cappioni (1996) beskriver nedan. Bodin och Cappioni har genomfört klassrumsstudier i tolv länder spridda över hela världen och de har kunnat presentera en sammanfattande beskrivning av hur matematikundervisningen såg ut i alla dessa länder. Samma mönster kunde David Clarke (1984) också se då han undersökte över 400 matematiklektioner i australienska högstudier och gymnasier.

Eleverna kommer in i klassrummet och sätter sig. Läraren inleder sedan med att gå igenom hemuppgifterna. Det gör han genom att först låta några elever räkna hemuppgifterna på tavlan. Sedan kommenterar och korrigerar läraren uppgifterna. Resten av lektionen "förklaras för tavlan" och eleverna skriver av regler och exempel i sina häften. Efter genomgången på tavlan arbetar eleverna individuellt med några uppgifter en stund, sedan skickar läraren en elev till tavlan för att lösa någon uppgift. Uppgiften kommenteras och korrigeras av läraren. I slutet av lektionen ger läraren några nya övningar som hemuppgifter eller ber eleverna färdigställa de uppgifter de börjat lösa i klassen (Bodin & Cappioni, 1996).

Även i min egen forskning har jag i viss utsträckning kunnat iaktta ett likartat mönster, trots att de berörda lärarna aktivt och medvetet strävade till att öka de kommunikativa arbetssättens

andel i undervisningen (Røj-Lindberg, 1999b). Till exempel en åttondeklassist gav mig följande beskrivning av en matematiklektion:

Vi gick igenom några exempel och sedan fick vi räkna i boken några uppgifter. Några elever fick först gå upp och räkna några gamla uppgifter, läxan, på tavlan. Sedan rättade läraren dom och vi funderade tillsammans. Läraren sade varför det blev så och berättade tills alla förstod. Vi gick sedan igenom några exempel med multiplikation och division med bråk. Då skrev läraren uppgifter på tavlan och så tog han upp olika personer som fick berätta hur man gjorde. Till sist fick vi räkna några uppgifter i boken medan läraren gick runt och hjälpte dem som markerade, som hade något oklart.

Det verkar alltså som om traditionella matematiklektioner världen över skulle se ganska likadana ut. De är vanligen mycket lärarstyrda och saknar ofta interaktion på någon högre kognitiv nivå. Elevernas bidrag inskränker sig till att besvara lärarens frågor, att parvis och i all tysthet jämföra svaren på lösta uppgifter eller att ge varandra beskrivningar av lösningsprocedurer utan någon diskussion. Läraren är den aktiva parten och den som styr all offentlig och legitim kommunikation i klassen. Dialogen mellan lärare och elever har oftast strukturen initiering-reaktion-återkoppling: läraren initierar något vilket ger upphov till en reaktion från elevens sida som sedan åtföljs av en utvärderande kommentar eller annan form av återkoppling från läraren. Elevinteraktionen innefattar sällan något mera omfattande utbyte av tankar och matematiska resonemang (se bl.a. Seeger, Voigt & Waschescio, 1998). Forskningen har kunnat påvisa att det här traditionella undervisningsmönstret kan få negativa konsekvenser för inläringen och för elevernas attityder till både sig själv och matematikämnet (se bl.a. Skemp, 1993).

Den starka lärarstyrningen kan medföra att vissa elever löper risk att tappa tron på sin förmåga att påverka inläringen. De utvecklar ett slags "lärarberoende" som innebär att de, i stället för att ta egna initiativ, helst väntar på lärarens instruktioner och förklaringar. Den vanliga fokuseringen på att lösa lärobokens uppgifter, som oftast är korta och väl tillrättalagda, påverkar elevernas koncentrationsförmåga och matematiska kreativitet i negativ riktning. Eleverna börjar till exempel uppfatta sådana uppgifter som inte klarats av på fem minuter som omöjliga att lösa utan lärarens hjälp. En annan risk är att elever, som är bra på att upprepa lösningsmönster och att få fram svar som står i överensstämmelse med lärobokens, invaggas i en falsk säkerhet om sin matematiska förmåga. Det, att man får fram rätt svar, tas som bevis på att man förstår och kan tänka matematiskt (se bl.a. Schoenfeld, 1988).

Ytterligare en risk är att elevernas förmåga att överföra den matematik, som de lärt sig i skolan, och tillämpa den i verkligheten utanför skolan inte utvecklas i önskvärd riktning, utan förblir begränsad. Matematik "på riktigt" upplevs av eleverna som något annat än läroböckernas och klassrummets matematik. Den traditionella skolmatematiken tycks leda till att eleverna blir relativt duktiga på att utföra matematiska procedurer, till exempel att ställa upp och räkna ut multiplikationer med decimaltal och bestämma andra derivatan av en funktion. Men då de matematiska procedurerna skall tillämpas så stöter eleverna på problem. Detta syntes tydligt i den nationella utvärderingen som gjordes i årskurs 9 våren 1998. Enligt Korhonen (1999, s. 68) visade utvärderingen att niondeklassisternas baskunskaper och

grundläggande färdigheter i genomsnitt var rätt goda, medan "prestationerna var speciellt svaga i uppgifter som krävde tillämpning av det inlärdas eller mera krävande tankeformer" (fri översättning av den finska originaltexten).

Matematikundervisning med samverkan

Då en socialt kognitiv syn på inläring omvandlas till praxis, borde den i undervisningen synas som mera samverkan och interaktion, både mellan elever och mellan elever och lärare.

Ett yttre tecken på elevsamverkan är att eleverna ofta arbetar tillsammans i mindre grupper medan de lär sig matematik. Gruppen kan omfatta bara två elever, men tre eller fyra elever är den optimala gruppstorleken. I gruppen kontrollerar man att alla förstår problemet, hjälper varandra att komma ihåg liknande uppgifter, lyssnar på varandra, testar och kritiserar varandras idéer, sammanfattar och kommer överens om till exempel en lösning eller en beskrivning av de samband man upptäckt (se bl.a. Artzt, Davidson, Goos m.fl.).

Flera faktorer måste beaktas för att elevsamverkan skall lyckas i de små grupperna. Det är centralt att alla elever i gruppen faktiskt har ett gemensamt mål i sikte. Om matematiklektionen inleds med att läraren går igenom någon ny regel eller teknik, kan eleverna först försöka tillämpa det nya på egen hand. Sedan kan läraren, i stället för att genomföra en klassdiskussion kring uppgifterna, låta eleverna samlas i grupper, för att fundera igenom uppgifterna och ha som gemensamt mål att lämna in en gruppredovisning. Då grupperna är klara kan läraren avsluta lektionen med en klassdiskussion kring de eventuella oklarheter och missuppfattningar som kommit fram i gruppdiskussionerna.

I en klassdiskussion är det ofta så att osäkra elever inte vågar ställa frågor. De känner sig förlägna över att inte ännu ha förstått och har kanske tankar i stil med "alla andra kan ju redan, jag lär mig väl sedan på egen hand hemma" eller "det här är för svårt för mig, ingen idé att fråga ens". Men efter gruppvisa diskussioner är eleverna i allmänhet motiverade att reda ut de oklarheter gruppen har haft. Då är det gruppen som behöver lärarens hjälp, inte den enskilda eleven. Det känns mycket tryggare att få föra gruppens talan än att behöva utelämma sig själv. Dessutom är det nu i första hand gruppen som ställer frågor till läraren och inte tvärtom.

En annan faktor av central betydelse för god elevsamverkan är att medlemmarna i den lilla gruppen är positivt beroende av varandra och att alla känner att de faktiskt har något att komma med då gruppen arbetar. Det betyder till exempel att man inleder problemlösningen med att var och en allra först tänker igenom problemet på egen hand och sedan skriver ner alla idéer man tycker är relevanta. Alla gör sig beredda att berätta för de andra i gruppen hur man har tänkt och vad man tycker är oklart. Det förberedande arbetet kan också göras som hemuppgift. Sedan kan gruppen få i uppgift att jämföra alla idéer och lösningsförslag som kommer fram, utveckla dem vid behov och till sist enas om vilka lösningar som blir gruppens gemensamma. Speciellt då eleverna är ovana med arbete i samverkan kan det här tillvägagångssättet fungera som ett effektivt första steg.

För att få samverka att fungera bra är det viktigt att eleverna tillsammans ibland funderar igenom hur gruppen fungerade och vad gruppen gjort. Den här processen kan man inte förutsätta att elever skall klarar av på egen hand, speciellt inte om de är ovana vid arbets sättet. Då en ovan grupp skall berätta om sin arbetsprocess brukar det ofta bli så att den enbart koncentrerar sig på *vad* man gjort och *vem* som gjort vad. Lärarens hjälp kan behövas för att få elevernas tankar inriktade på att också reflektera över *hur* gruppen arbetat, hur gruppmedlemmarna uppfattat arbetsprocessen, hur var och en axlat den ansvarsfördelning man eventuellt kommit överens om på förhand och hur man tillsammans skulle kunna förbättra arbetet. I grupper, där den kontinuerliga och kritiska granskningen av lösningsprocessen uteblir, finns det risk för att gruppsamverkan inte får den avsedda positiva effekten. Det gäller till exempel för gruppen att lära sig att vänta med att nonchalera en framförd lösningsidé tills den blivit ordentligt testad och att hela tiden medvetet vara lyhörda för att någon kan sitta inne med andra och mera fruktbara lösningsförslag.

Eleverna borde komma till insikt om, att en fungerande interaktion i gruppen förutsätter att alla är medvetna om att var och en kan påverka den matematiska diskussionens kvalitet och därmed vad varje gruppmedlem lär sig. Det har till exempel visat sig, att både de elever som ställer frågor och de elever som förklarar för andra lär sig mera matematik. Men det finns också en tydlig koppling till sämre prestationer för en elev som inte får svar på sina frågor och vars kommentarer eller förslag ignoreras av gruppen. Det är alltså viktigt att gruppen faktiskt reagerar konstruktivt på alla lösningsförslag, förklarar sina idéer för varandra och ber varandra om förtydliganden och tilläggsförklaringar. Att bara ge det rätta svaret åt den som frågar är inte tillräckligt (se bl.a. Dance, 1997; Davidson, 1990; Webb, 1991).

Då man följt upp beteendet i välfungerande elevgrupper, medan de löser matematiska problem, har man märkt att lösningsprocessen kan jämföras med hur en matematiker arbetar. Man tänker högt och förändrar lösningsprocessen på basis av testning och den feedback man ger varandra i gruppen. Alla förslag analyseras konstruktivt innan de antingen förkastas eller accepteras. Ofta undviker man på så sätt att fastna i någon vild gissning, vilket ofta händer då en elev sitter och tänker på ett problem helt för sig själv.

Även uppgifternas utformning är en kritisk faktor för hur samverkan mellan eleverna kommer att fungera. Slutna, rutinartade och mekaniska uppgifter med en enda uppenbar lösning, är definitivt inte lämpliga. Om gruppen får sådana uppgifter kommer eleverna antagligen att jobba parallellt med varandra utan diskussion. Öppna uppgifter kan däremot lösas på flera sätt och har inget entydigt svar. Därför ger dylika uppgifter upphov till interaktion i gruppen på ett naturligt sätt.

Elevernas olika mängd kunskap om den matematik, som uppgiften kräver, syns också i gruppens arbete, även om det nödvändigtvis inte behöver utgöra något problem. De elever som kan mera om en viss uppgift kommer helt enkelt att i högre grad använda sin kunskap för att lära de andra i gruppen. Om uppgiften är ny och utmanande för alla gruppmedlemmar kommer interaktionen däremot i högre grad att rikta in sig på gemensam förståelse, tolkning, testning och diskussion av lösningsförslag.

Om uppgiften ligger till grund för en individuell bedömning av elevernas prestationer, kommer det att synas i gruppens interaktion. Diskussionen i gruppen påverkas negativt. Även om läraren uppmanar eleverna att diskutera med varandra och ge varandra idéer under lösningsprocessen är det sannolikt att de medvetet undviker detta. Beteendet uppfattas inte som stödande ur den enskilda individens och speciellt inte ur den duktige elevens synvinkel. Tvärtom reagerar starkare elever negativt på frågor och förslag från andra och osäkrare gruppmedlemmar. Eleven får en uppfattning av hur en uppgift används i undervisningen: som uppgift avsedd för inläring eller som uppgift avsedd för bedömning av de egna prestationerna. Detta får alltså konsekvenser för hur eleven beter sig i gruppen helt oavsett vilka instruktioner gruppen har fått av läraren.

Arbetsättet påverkar elevernas attityder

Många högstadieelever tycks uppfatta det som en omöjlighet att ha roligt på matematiklektionerna, därför att skolmatematik så sällan sammankopplas med positiva upplevelser av något annat slag än de rent prestationsinriktade. Det kan vara både tillfredsställande och prestigefyllt ur den enskildes, speciellt ur den kognitivt framgångsrike elevens, synvinkel att syssla med matematik och få fina vitsord. Att man skall kunna lära sig matematik samtidigt som man ägnar sig åt kreativ och meningsfull problemlösning i samverkan med de andra i klassen, det ingår däremot inte i det traditionella normsystemet för matematikundervisningen. Eleverna har helt enkelt börjat tro att matematik är ett mycket mekaniskt och procedurinriktat ämne. De har blivit övertygade om att det inte går att lära sig matematik på något annat sätt än med hjälp av flitigt och individuellt övande av lärobokens uppgifter.

Det har visat sig att undervisning med samverkan ofta går hand i hand med inlärningsglädje. I en undervisningssituation präglad av inlärningsglädje är både elever och lärare ivriga, nyfikna och uthålliga och känner sig motiverade att tillsammans syssla med matematik på ett kreativt sätt. Låt oss stanna upp en stund och tänka på hur det känns att riktigt fångas av ett matematiskt problem. Då rinner tiden obemärkt iväg. Då blir det väsentligt att föra en dialog både med sig själv och med andra, att ifrågasätta och pröva. Då rullar den mentala problemlösningsprocessen vidare även om man däremellan gör andra saker. Om man kommer in i en återvändsgränd, så ger man inte upp, utan försöker hitta någon vettig utväg. Att komma i mål, att få det rätta svaret, är minst lika viktigt som arbetet med att söka en meningsfull lösning på problemet. Men sedan, då man kommit fram till lösningen, är glädjen stor. Då man undersökt matematikklasser och grupper som varit framgångsrika både i inlärnings- och attitydhänseende, så har man kunnat iaktta just sådana här drag i deras arbete (se bl.a. Dance, 1997).

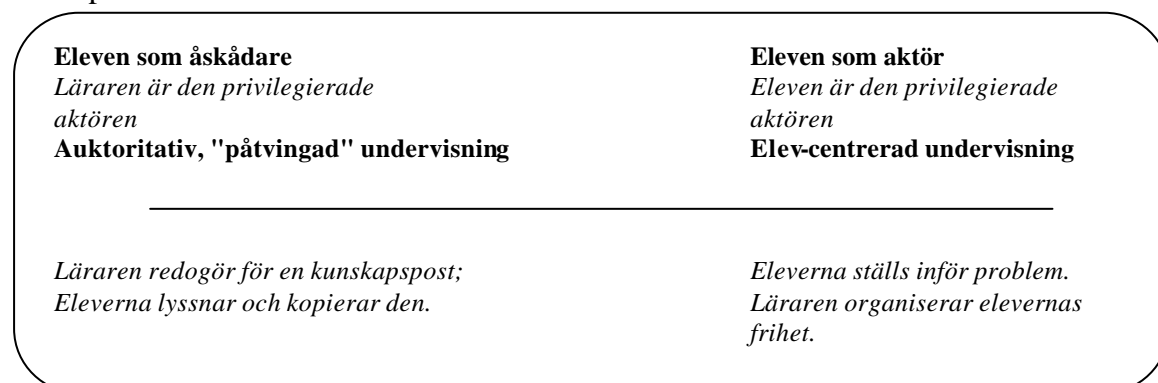
Inlärningsglädje går även hand i hand med en känsla av meningsfullhet och tillfredsställelse över att man både får och kan hitta lösningar på ett problem, utan att läraren blandar sig i det. Att få arbeta och tala med andra elever ger en påfallande stor ökning av inlärningsglädjen. I många undersökningar, där man testat effekterna av samverkande arbetsätt, har eleverna dessutom påpekat att de faktiskt förstår varandra bättre än vad de förstår läraren och lärarens förklaringar.

Men även hos eleverna kan en metodförändring väcka motstånd. En ny undervisningsmodell, med nya krav på eleverna, betyder att det sk. didaktiska kontraktet mellan lärare och elever skall omförhandlas (Brousseau, 1984). Forskning har kunnat verifiera, att elever, som är vana med den traditionella undervisningsmodellen, uppvisar en kraftig övertygelse om att bra matematikundervisning skall vara lärarstyrd och att matematik är regler som man lär sig utantill. Även om eleverna säger att matematikundervisningen vanligen är trist och tråkig så ser de sällan några andra arbetsätt som möjliga, helt enkelt därför att de aldrig upplevt någon annan modell (se bl.a. Black & Atkin, 1996; Røj-Lindberg, 1999b). Lovisa, en högpresterande åttondeklassist, såg ändå arbete i grupp som en möjlighet att öka arbetsron i klassen:

Det går liksom som långsamt framåt och man tycker ju att det här kan jag. Och så orkar man inte riktigt höra på och så sitter man och klottar i häftet lite och sedan så hör man på igen och kommer fram till att han pratar om precis samma sak som i början av lektionen. Jag vet inte riktigt hur man skulle kunna ändra, nog finns det säkert någonting. Men jag tycker att man skulle kunna jobba i grupper, då skulle det ju bli tre, fyra i varje grupp och så jobbar man med något slags grupparbete. Då skulle det ju bli så att sådana som har överloppsenergi ändå får ut sin energi på att både prata och tänka. De som inte kan hålla tyst får prata då liksom, kanske hitta på egna uppgifter. Nu samarbetar vi ganska sällan med varandra på lektionerna.

Förändrad lärarroll

Gällande undervisningen i grundskolan så säger läroplanen att allt mera ansvar för inläringen borde flyttas över till eleverna. Ju äldre elever, desto mera ansvar kan de förutsättas axla. Lärarens roll borde därmed också förändras, dock inte så att ökat elevansvar medför minskat läraransvar, utan så att läraransvaret tar sig nya former. Förenklat kan man säga att matematikläraren borde lämna sin roll som enväldig aktör och domare och i stället bli en demokratisk organisatör av elevernas arbete. Eleven skall, från att ha varit den som passivt tar emot kunskap och "sväljer" lärobokens innehåll bit för bit, bli den som aktivt deltar i "återupptäckandet" av den gemensamma matematiken. Figuren nedan kan användas för att uppskatta var en lärares genomsnittliga undervisningspraxis befinner sig i relation till de här två motpolerna.



Figur 2. Två motpoler i lärares undervisningspraxis (bearbetad på basis av Bodin & Cappioni, 1996)

Eftersom en undervisningsmetod kan medföra många dramatiska och även oönskade konsekvenser för en elevs inläring och självkänsla, borde all undervisningspraxis inkludera att läraren är medveten om dessa följder. Lärarens ansvar som "organisatör av elevernas frihet" borde således innebära att läraren också förbereder både sig själv och eleverna på de krav som olika metoder och arbetssätt ställer. På så sätt har han alltid en möjlighet att välja just det arbetssätt som bäst lämpar sig för en viss uppgift och en viss elevgrupp. Helst borde valet av arbetssätt ske i samråd med eleverna. Om uppgiften till exempel kräver träning av basfakta, så är det kanske mera lämpligt med mindre strukturerade former av samverkan än om uppgiften är mera komplex och av problemlösningskaraktär. Elevernas ålder och tidigare erfarenheter måste också beaktas.

Ökad elevcentrering är absolut inte synonymt med att varje elev skall arbeta individuellt eller helt i egen takt med uppgifterna. Det kan i stället till exempel betyda att eleverna tar ansvar för större problemhelheter eller projekt och att arbetet organiseras så att eleverna vid behov kan kommunicera både med varandra och med läraren.

Eleverna kan inte förutsättas reda ut alla matematiska begrepp och regler helt på egen hand. Den traditionella, lärarstyrda förmedlingspedagogiken försvarar därför fortfarande sin plats i lärarens och elevernas register över möjliga arbetssätt. Men läraren kan även inom ramen för den traditionella undervisningsmodellen sträva till att allt oftare engagera eleverna i matematiska klass- och gruppdiskussioner som både har en motiverande funktion och som hjälper eleverna att utveckla sin förmåga att klarlägga och tillämpa matematiska idéer.

Några avslutande kommentarer

En positiv attityd till matematiken som skolämne har en fördelaktig inverkan på elevernas förmåga att lära sig matematik. Den inre motivationen att lära sig, inlärningsglädjen, spelar också en avgörande roll. Allt tyder på att om eleverna arbetar i samverkan på matematiklektionerna så leder det till att de börjar tycka bättre om ämnet, de trivs bättre med undervisningen, de är mera uthålliga och sporras av att arbeta för något gemensamt. Det är både en trygghet och en utmaning att ha möjligheten att ställa frågor till de andra i gruppen om man känner sig osäker, liksom att också få vara den som förklarar för de andra. Den lilla gruppen bildar en social miljö som är lugn och som inte upplevs som hotande. Speciellt markant blir den positiva effekten av inläring i små grupper för flickornas del. Flickorna trivs bättre i en miljö där de får tala om det de lär sig, diskutera, stöda och undervisa varandra (Grevholm, 1992).

Många lärare brukar vara tveksamma till att låta elever arbeta i grupper eftersom man tror att lata elever skall åka snålskjuts, att gruppen skall anse att en svag elev är ett hinder och att duktiga elever skall protestera mot att det läggs för mycket läraransvar på dem. Allt tyder dock på att om uppgifterna är lämpliga och om eleverna känner sitt ansvar för arbetet och för interaktionen, så blir effekten den motsatta. Alla elever, men speciellt de svagare eleverna, vinner inlärningsmässigt på att få chans att tala mera matematik. Men det är klart att eleverna måste lära sig hur man skall bete sig i en grupp. Att bara uppmana eleverna att placera sig fysiskt nära varandra, ge grupperna uppgifter och sedan vänta sig att de skall klara sig på egen hand, fungerar endast i fall eleverna redan vet vad det innebär att samarbeta.

Eleverna måste först få chans att lära sig arbetssättet. För dem gäller precis samma som för läraren: det är inte lätt att förändra sitt beteende. Om de under många år har haft den passiva åskådarrollen kräver övergången till en aktiv och ansvarsfull aktörsroll en ganska lång inkörningsperiod. Inläringen av de färdigheter och normer, som det nya arbetssättet kräver, är verkligen central. Då man har jämfört effekterna av traditionell matematikundervisning och undervisning i små grupper, har man märkt att skillnaderna i vissa fall blivit försumbara. Detta hände då läraren inte hade någon tidigare erfarenhet av undervisning i små grupper, inte var medveten om olika sätt att variera mönstret för samverkan och inte gjorde tillräckligt för att stöda elevinteraktionen (Davidsson, 1990).

Flickors dåliga självförtroende som matematiker har kommit fram i många undersökningar. Så även i den nationella utvärdering som gjordes våren 1998 och som omfattade 3575 elever i årskurs nio. Några större skillnader i inlärningsresultat såg man inte mellan könen, men däremot nog i attityder: Pojkar och flickor var i princip lika kunniga i matematik, men pojkarna litade mera på sin förmåga än flickorna (Korhonen, 1999). För flickornas del skulle sannolikt en övergång till mera samverkan i matematikundervisningen kunna leda till både förbättrad självkänsla och positivare attityder till matematiken (Grevholm, 1992; Røj-Lindberg, 1999b).

Till sist kan sägas att steget till verklig förändring i klassrummets matematikundervisning är oerhört mycket längre än den relativt enkla åtgärden att via läroplanstexter markera ett förändringsbehov. Vägen till nya mönster för undervisning och inläring är en långsam och oftast mödosam process, som kräver omfattande normförändringar i hela skolsystemet, inte bara i matematikklassrummet. Förändringen kan vara mycket svår för en lärare, eftersom han eller hon måste ompröva sin lärarroll helt och hållet. Det gamla undervisningsmaterialet passar inte längre. Sättet att undervisa, attityder och grundläggande antaganden gällande inläring måste förändras. Allt tyder dock på att både lärare och elever har mycket att vinna på att slå in på en väg, som leder mot mera interaktion och samverkan i matematikundervisningen (Black & Atkin, 1996; Goos, 1997; Sharan, Shachar & Levin, 1999).

Litteratur

- Björkqvist, O. (1994). Vill vi ha en förändrad skolmatematik? I: Björkqvist & Finne (red.) *Matematikdidaktik i Norden*. Rapporter från Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi, nr 8 1994. Vasa: Pedagogiska fakulteten.
- Björkqvist, O. (1995). *Utvärdering av matematikkunskaperna i årskurs 9 i grundskolan, del II*. Publikationer från Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi, nr 16 1995. Vasa: Pedagogiska fakulteten.
- Black, P. & Atkin, J. M. (eds) (1996). *Changing the Subject. Innovations in Science, Mathematics and Technology Education*. London: Routledge.
- Bodin, A. & Capponi, B. (1996). Junior Secondary School Practices. I: Alan Bishop m.fl. (red.) *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
- Brousseau, G. (1984). The Crucial Role of the Didactical Contract in the Analysis and Construction of Situations in Teaching and Learning Mathematics. I: H. Steiner (ed.) *Theory of Mathematics Education*. Occasional Paper 54, IDM Bielefeld, 110-119.
- Dance, R. (1997). *A Characterization of Aspects of the Culture of a Successful Mathematics Classroom in an Inner City School*. Michigan: UMI Dissertation Services.

- Davidson, N. (ed.) (1990). *Cooperative Learning in the Mathematics Class. A Handbook for Teachers*. New York: Addison-Wesley.
- Grevholm, B. (red.) (1992). *Kvinnor och matematik*. Rapporter om utbildning nr 1. Malmö: Lunds Universitet.
- Goos, M. (1997). Making Sense of Mathematics: The Teacher's Role in Establishing a Classroom Community of Practice. I M. Goos, K. Moni & J. Knight (eds.): *Scholars in Context: Prospects and Transition*. Brisbane: Post Pressed.
- Gruginetti, L. & Jaquet, F. (1996). Senior Secondary School Practices. I: Alan Bishop m.fl. (red.) *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
- Grunderna för grundskolans läroplan* (1994). Helsingfors: Utbildningsstyrelsen.
- Kupari, P. & Saranen, E. (1999). Peruskoululaisten ja lukiolaisten matematiikan suoritustulosten arviointia. I: O. Björkqvist (Ed.) *Quality Aspects of Mathematics and Science Education*. Reports from the Faculty of Education No 5. Vasa: Åbo Akademi University.
- Korhonen, H. (1999). *Peruskoulun matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 1998*. Helsingfors: Utbildningsstyrelsen.
- Kriterier för slutbedömningen i den grundläggande utbildningen* (1999). Helsingfors: Utbildningsstyrelsen.
- Pehkonen, E. (1999). Suomen matematiikanopetuksen tila kansainvälisten vertailututkimuksen valossa. I: O. Björkqvist (Ed.) *Quality Aspects of Mathematics and Science Education*. Reports from the Faculty of Education No 5. Vasa: Åbo Akademi University.
- Røj-Lindberg, A-S. (1999a). *Läromedel och undervisning i matematik på högstadiet. En kartläggning av läget i Svenskfinland*. Vasa: Svenskfinlands läromedelscenter.
- Røj-Lindberg, A-S. (1999b). *Utveckling av matematikundervisningen genom aktionsforskning. Kartläggning av ett högstadieprojekt och beskrivning av elevernas tankar om undervisningen*. Manuskript för licentiatavhandling. Vasa: Pedagogiska fakulteten.
- Sarason, S. B. (1980). *Skolekologi. Om skolans kultur och förändringens problem*. Stockholm: Wahlström & Widstrand.
- Schoenfeld, A. H. (1988). When Good Teaching Leads to Bad results: The Disaster of "Well-Taught" Mathematics Courses. *Educational Psychologist*, 23(2), 145-166.
- Seeger, F. Voigt, J. & Waschescio, U. (eds.) (1998). *The Culture of The Mathematics Classroom*. Cambridge: University Press.
- Sharan, S., Shachar, H. & Levine T. (1999). *The Innovative School: Organization and Instruction*. Westport: Bergin & Garvey.
- Skemp, R. R. (1993) *The Psychology of Learning Mathematics*. London: Penguin Books.
- Svedlin, R. (1999). Utvärderingarna – vad säger de om Svenskfinland? *Spektri* 4/99, 33-35.
- Udd-Ståhl, H. (1999). Kräver vi för lite av matematiklärarna? *Spektri* 4/99, 30.
- Webb, N. (1991). Task-related Verbal Interaction and Mathematics Learning in Small Groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(5), 366-389.